Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 31.01.2014.

Pismeni ispit iz Euklidske geometrije II, (ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte)

1. (50%)(a) U trougao $\triangle ABC$ upisan je paralelogram $\square ADEF$ tako da tjemena D, E i F leže redom na stranicama AB, BC i CA. Kroz središte A_1 stranice BC konstruisana je prava AA_1 koja siječe pravu EF u tački G. Dokazati da je četverougao $\square BGFD$ paralelogram.

(50%)(b) Pokazati da ako proizvoljni krug koji sadrži tačke B i C siječe ivice AB i AC trougla $\triangle ABC$ u tačkama B' i C', onda je duž $B'C'$ paralelna tangenti na opisani krug trougla $\triangle ABC$ u tački A.

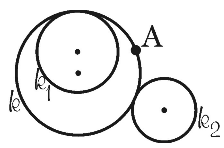
2. (30%)(a) Dat je trougao $\triangle ABC$ u kome su poznate dvije visine $AA' = h_a$, $CC' = h_c$ i težišnica $CC_1 = t_c$. Na stranici BC data je tačka D takva da $C_1D \perp BC$ i $C_1D = \frac{1}{2}AA'$. Diskutovati da li se tačka D može dobiti kao presjek dva kruga čiji se poluprečnici mogu izraziti preko h_a, h_c ili t_c.

(70%)(b) U unutrašnjosti datog trougla odrediti tačku iz koje se sve tri stranice vide pod podudarnim uglom.

Napomena: Konstruisati figuru podrazumjeva četri koraka: Analizu, Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju.

3. (30%)(a) Dokazati da je površina pravouglog trougla jednaka proizvodu odsječaka p i q na koje u trouglu upisani krug dijeli hipotenuz.

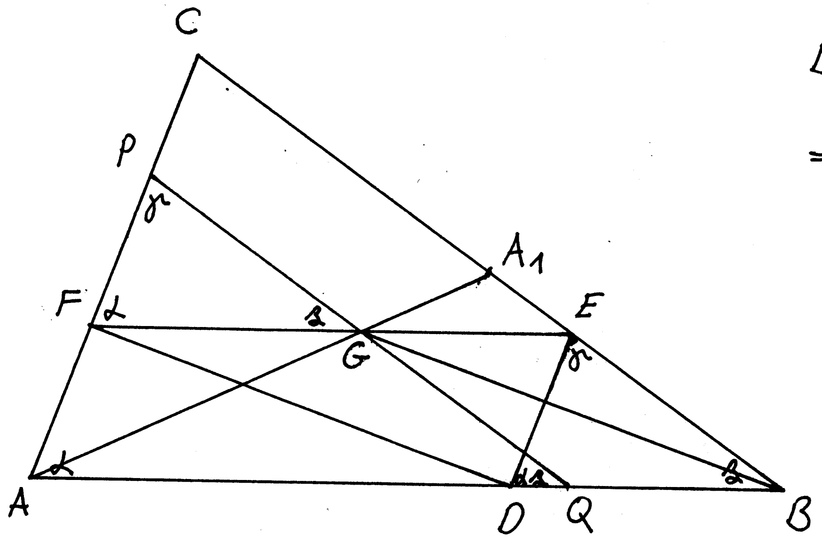
(70%)(b)Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ i tačka A. Konstruisati krug $k(O, r)$ koji prolazi kroz tačku A i dodiruje krugove k_1 i k_2 kao na skici. Detaljno sprovesti samo Analizu (ne koristiti dokaz tipa pozivanja na neki drugi Apolonijev problem, koji je od ranije poznat, nego sve detaljno analizirati). Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi ali bodovati će se samo Analiza.



Zadaci su skinuti sa stranice pf.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

(#) U trougao ΔABC upisan je paralelogram $\square ADEF$ tako da tjemena D, E i F leže redom na stranicama AB, BC i CA. Kroz središte A_1 stranice BC konstruisana je prava AA_1 koja siječe pravu EF u tački G. Dokazati da je četverougao $\square BGFD$ paralelogram.

Rj.



$\square ADEF$ paralelogram

$\Rightarrow p(A,D) \parallel p(E,F)$

i $p(A,F) \parallel p(D,E)$

Kroz tačku G povucimo pravu paralelnu pravoj $p(B,C)$ koja siječe stranice AC i AB redom u tačkama P i Q.

$p(G,E) \parallel p(Q,B)$ i $p(Q,G) \parallel p(E,B) \Rightarrow \square QBEG$ paralelogram

$\Rightarrow GQ \cong BE$

$p(B,C) \parallel p(P,Q) \xrightarrow{TT} \dfrac{BA_1}{CA_1} = \dfrac{GQ}{GP} \Rightarrow \dfrac{GQ}{GP} = 1$ tj. $PG = GQ$

$p(B,C) \parallel p(P,Q)$ i $p(A,B)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle AQP \cong \measuredangle ABC = \beta$

$p(A,B) \parallel p(E,F)$ i $p(Q,P)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle AQP \cong FGP = \beta$

tj. $\measuredangle AQC \cong \measuredangle FGP = \beta$

$p(A,B) \parallel p(F,E)$ i $p(A,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CAB \cong \measuredangle CFE = \alpha$

$p(A,C) \parallel p(D,F)$ i $p(A,B)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CAB \cong \measuredangle EDB = \alpha$

tj. $\measuredangle CFE \cong \measuredangle EDB = \alpha$ pa je i $\measuredangle FPG \cong \measuredangle DEB = \gamma$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle PFG \cong \measuredangle EDB = \alpha \\ \measuredangle FGP \cong \measuredangle DBE = \beta \\ \measuredangle GPF \cong \measuredangle BED = \gamma \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{sličn. UUU}} \Delta FGP \sim \Delta DBE$$

$$\Downarrow$$

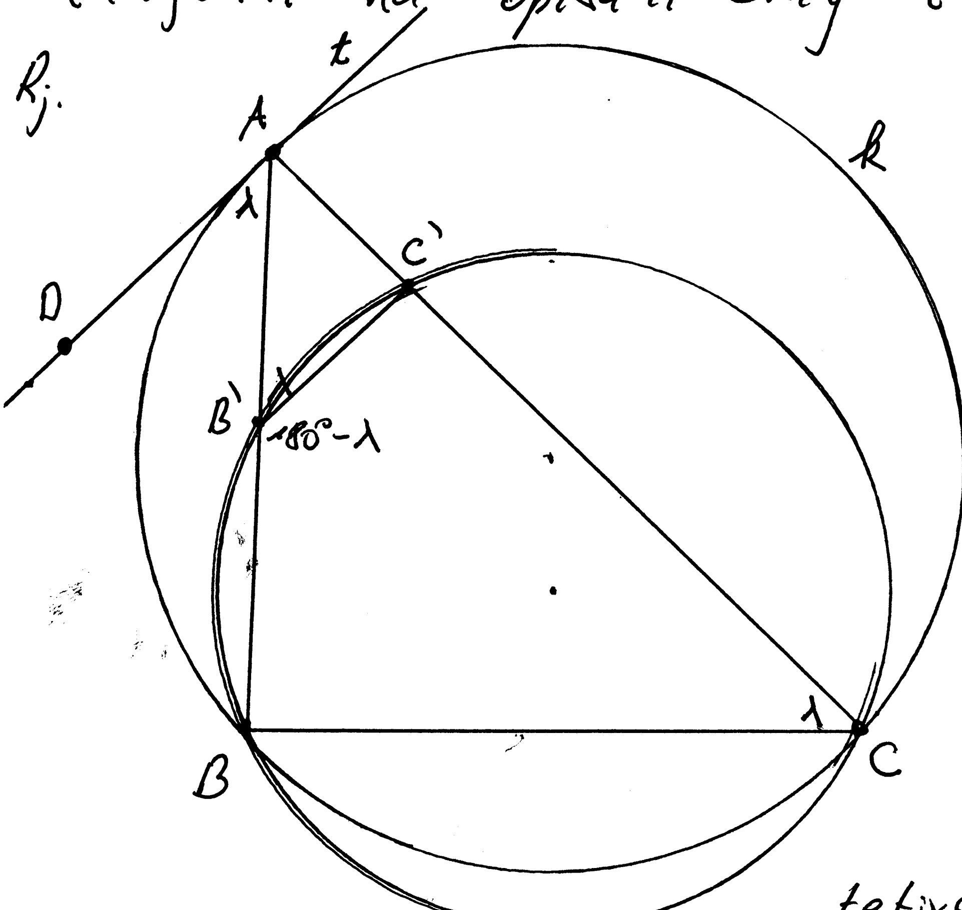
$$\frac{DB}{FG} = \frac{BE}{PG} \xrightarrow{BE = GQ = PG} \frac{DB}{FG} = 1 \text{ tj. } DB = FG$$

$p(D,B) \parallel p(F,G)$ i $DB \cong FG \Rightarrow \square BGFD$ paralelogram

q.e.d.

(#) Pokazati da ako proizvoljni krug koji sadrži tačke B i C siječe ivice AB i AC trougla $\triangle ABC$ u tačkama B' i C', onda je duž $B'C'$ paralelna tangenti na opisani krug trougla $\triangle ABC$ u tački A.

Rj.



Neka je t tangenta u tački A na krug k koji je opisan oko $\triangle ABC$, i neka je $D \in t$ koja se nalazi sa suprotne strane $p(B, A)$ od tačke C.

Znano da je ugao između tangente i tetive podudaran periferiskom uglu nad tom tetivom pa je $\measuredangle BAD \cong \measuredangle BCA = \lambda$.

Kako je $\square BCC'B'$ tetivni to je $\measuredangle C'B'B = 180° - \lambda$

pa je $\measuredangle C'B'A = \lambda$.

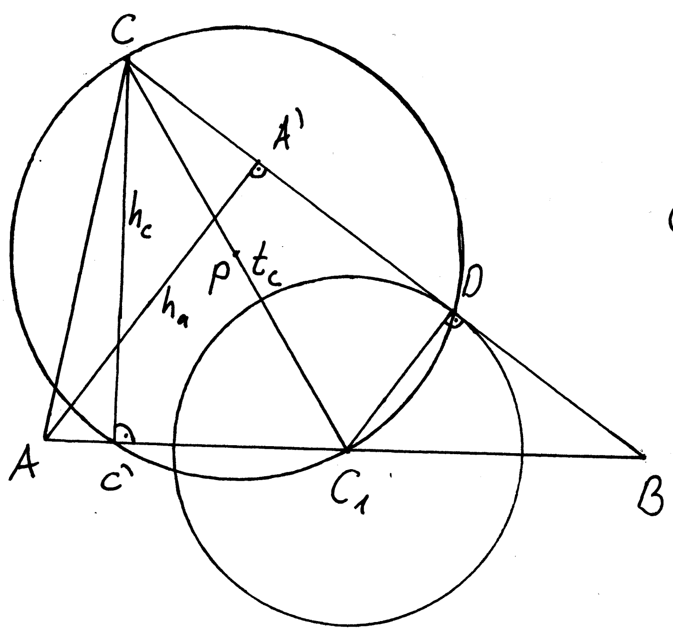
Kako su uglovi $\measuredangle B'AD$ i $\measuredangle C'B'A$ podudarni uglovi na pravoj $p(B', A)$ to je

$$t \parallel B'C'$$

q.e.d.

Dat je trougao ΔABC u kome su poznate dvije visine $AA' = h_a$, $CC' = h_c$ i težišnica $CC_1 = t_c$. Na stranici BC data je tačka D takva da $C_1D \perp BC$ i $C_1D = \frac{1}{2} AA'$. Diskutovati da li se tačka D može dobiti kao presjek dva kruga čiji se poluprečnici mogu izraziti preko h_a, h_c ili t_c.

Rješenje:



$AA' = h_a$

Prema pretpostavci zadatka

$C_1D = \frac{1}{2} AA' = \frac{1}{2} h_a$,

Prema tome prvi krug može biti $k_1(C_1, \frac{1}{2} h_a)$

Trougao ΔCDC_1 je pravougli pa je centar opisanog kruga tog trougla na sredini težišnice $t_c = CC_1$. Označimo tu tačku sa P.

Drugi krug može biti $k_2(P, \frac{1}{2} t_c)$.

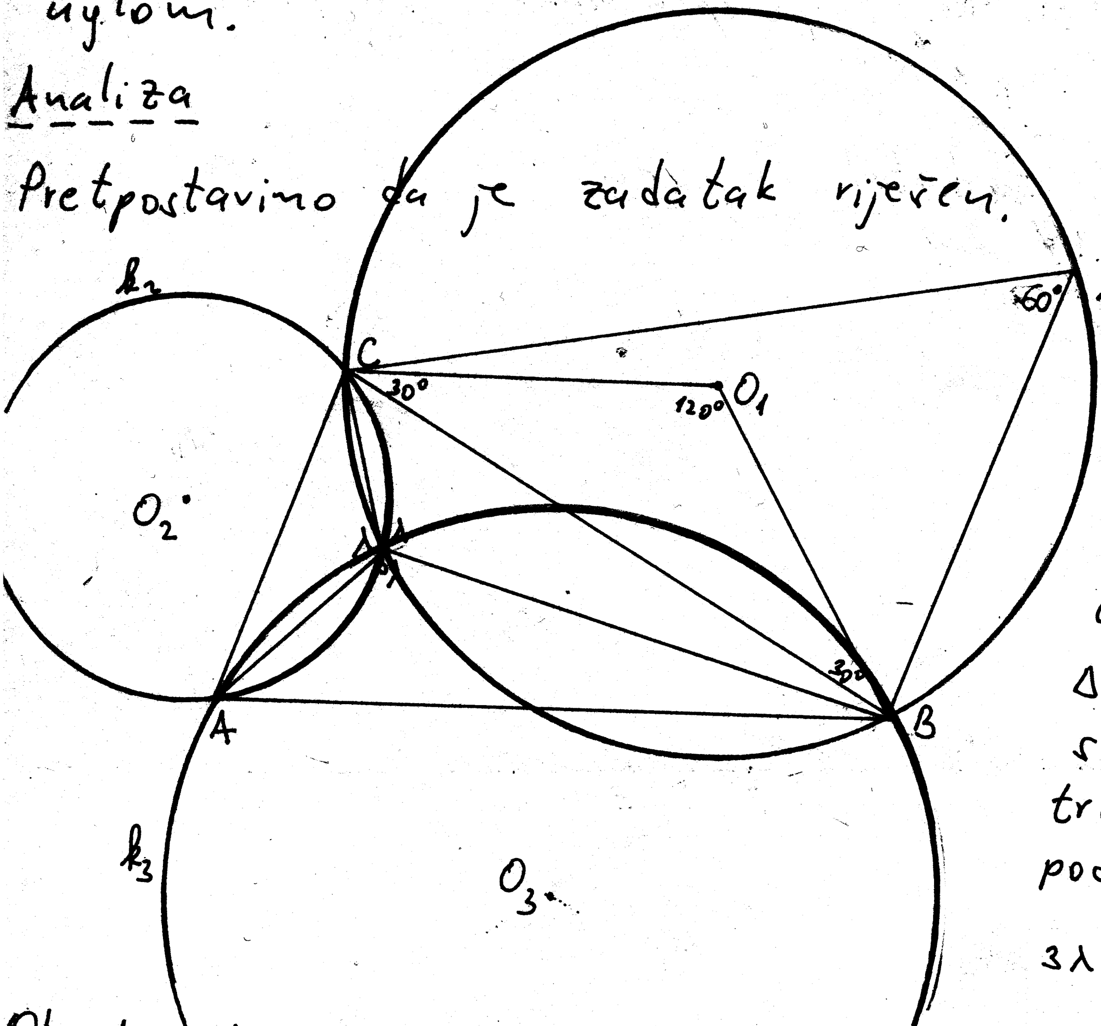
Na kraju $\{D\} = k_1(C_1, \frac{1}{2} h_a) \cap k_2(P, \frac{1}{2} t_c)$.

q.e.d.

(#) U unutrašnjosti datog trougla odrediti tačku iz koje se sve tri strane trougla vide pod podudarnim uglom.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je tačka P u unutrašnjosti $\triangle ABC$ iz koje se sve tri stranice trougla vide pod podudarnim uglom λ.

$3\lambda = 360^\circ \Rightarrow \lambda = 120^\circ$

Oko trougla $\triangle BCP$ opišimo krug $k_1(O_1, r_1)$. Tada je $\measuredangle BPC = 120^\circ$ tupi periferiski ugao nad tetivom BC kome odgovara oštri periferiski ugao nad istom tetivom od 60° pa je centralni ugao nad tetivom BC, $\measuredangle BO_1C = 120^\circ$.

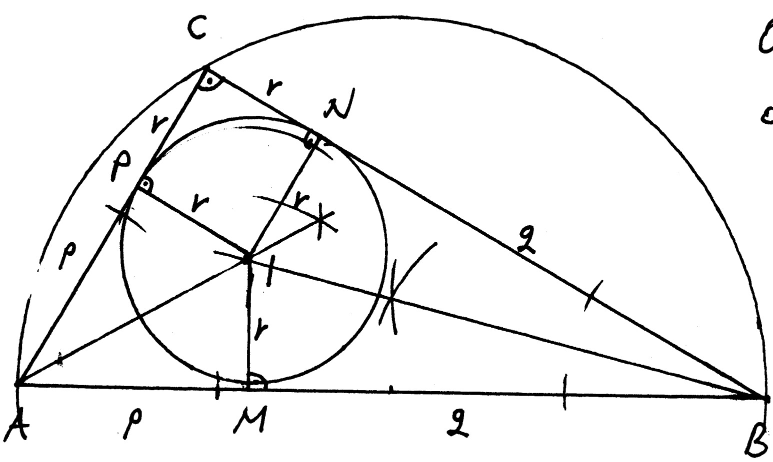
$\triangle BO_1C$ jkk $\Rightarrow \measuredangle O_1CB = \measuredangle CBO_1 = 30^\circ$.

Ako bi oko trougla $\triangle APC$ opisali krug $k_2(O_2, r_2)$ ili oko $\triangle ABP$ opisali krug $k_3(O_3, r_3)$ na sličan način bi došli do rezultata $\measuredangle ACO_2 = \measuredangle O_2AC = \measuredangle BAO_3 = \measuredangle ABO_3 = 30^\circ$.

Kako možemo konstruisati kružnice k_1, k_2 i k_3 time možemo konstruisati i tačku P.

Dokazati da je površina pravouglog trougla jednaka proizvodu odsječaka p i q na koje u trouglu upisana kružnica dijeli hipotenuzu.

Rj.



Neka je I centar upisanog kruga u trouglu ΔABC. Označimo sa M, N i P ortogonalne projekcije tačke I na duži AB, BC i AC redom. Znamo da je $IM = IN = IP = r$.

Dalje, primjetimo da je $BM \cong BN$ i $AM \cong AP$ (Zašto?). Isto tako $PC \cong CN \cong r$ (Zašto?)

Neka je $AM = p$ i $BM = q$.

$$P_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{(p+r)(q+r)}{2}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{pq + pr + qr + r^2}{2} \quad \ldots (1)$$

ΔABC pravougli $\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$(p+q)^2 = (p+r)^2 + (q+r)^2$$

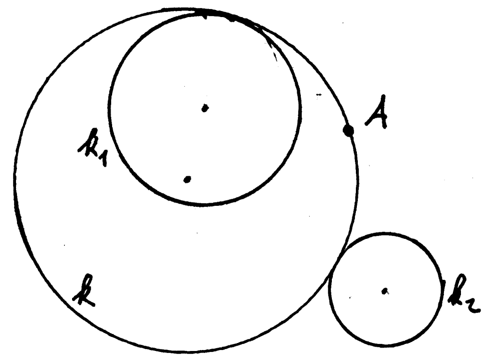
$$\cancel{p^2} + 2pq + \cancel{q^2} = \cancel{p^2} + 2pr + r^2 + \cancel{q^2} + 2qr + r^2 \quad /:2$$

$$pq = pr + qr + r^2 \quad \ldots (2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow$ $P_{\Delta ABC} = \dfrac{pq + pq}{2} = pq$

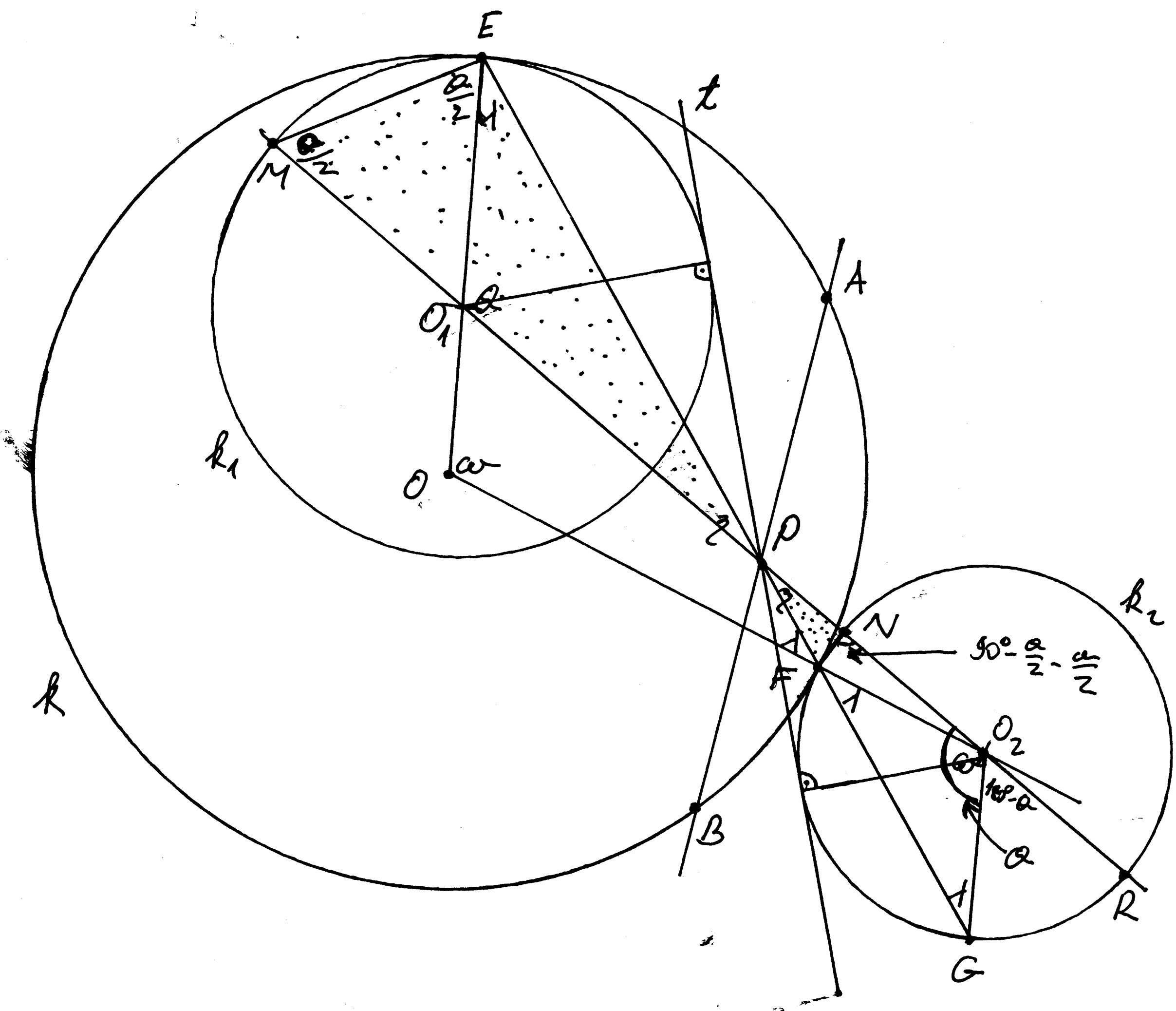
q.e.d.

(#) Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ i tačka A. Konstruisati krug $k(O, r)$ koji prolazi kroz tačku A i dodiruje krugove k_1 i k_2 kao na skici.



Rj: <u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $k(O, r)$ traženi krug koji prolazi kroz tačku A i dodiruje krugove $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ redom u tačkama E i F.



Označimo sa M i N tačke na pravoj $p(O_1, O_2)$ tako da je $M-O_1-N-O_2$ i $M \in k_1$, $N \in k_2$. Dalje neka je P tačka

$$\{P\} = p(O_1, O_2) \cap p(E, F).$$

Kako je F dodirna tačka krugova k i k_2 znamo da je $O-F-O_2$

Neka je $\{G\} = p(E, F) \cap k_2$

Ako označimo sa λ ugao $\measuredangle O_2FG$ imamo da je i

$\measuredangle OFE = \lambda$ (unakrsni) $\Rightarrow \measuredangle OEF \cong \measuredangle FGO_2 = \lambda$ (trouglovi $\triangle OFE$ i $\triangle FGO_2$ su jkk) $\Rightarrow \measuredangle EOF \cong \measuredangle GO_2F = \omega$.

Pa na pravoj $p(O, O_2)$ imamo ugao $\omega \Rightarrow p(O, E) \parallel p(O_2, G)$.

Dalje, želimo pokazati da su trouglovi $\triangle MEP$ i $\triangle PFN$ slični. Neka je $R \in k_2$ t.d. $N-O_2-R$. Posmatrajmo oštri periferiski ugao $\measuredangle FNR$ nad lukom FGR. Njemu odgovarajući centralni je $\measuredangle FO_2R$ (nad istim lukom)

Ako označim sa α ugao $\measuredangle NO_2G$ imamo da je $\measuredangle RO_2G = 180° - \alpha$.

Isto tako, kako je $p(O, E) \parallel p(G, O_2)$ i $p(O_1, O_2)$ transferzala $\measuredangle EO_1P = \alpha$. Sad oštri periferiski ugao $\measuredangle FNR$ iznosi $90° - \frac{\alpha}{2} + \frac{\omega}{2}$ (zato što je centralni $\measuredangle FO_2R = \omega + 180° - \alpha$).

Prema tome možemo zaključiti da je $\measuredangle FNP = 90° + \frac{\alpha}{2} - \frac{\omega}{2}$.

Trougao $\triangle MO_1E$ je jkk sa osnovicom EM i vanjskim uglom kod vrha O_1 α pa je $\measuredangle O_1ME \cong \measuredangle O_1EM = \frac{\alpha}{2}$.

Znamo da je $2\lambda + \omega = 180° \Rightarrow \lambda = 90° - \frac{\omega}{2}$ tj. imamo da je $\measuredangle MEP = \frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\omega}{2}$. Možemo zaključiti

$$\left.\begin{aligned} &\measuredangle PNF \cong \measuredangle MEP = 90° + \frac{\alpha}{2} - \frac{\omega}{2} \\ &\measuredangle NPF \cong \measuredangle EPM \text{ (unakrsni)} \\ &\measuredangle EMP \cong \measuredangle PFN \text{ (treći ugao)} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{(slič. UUU)}} \triangle PFN \sim \triangle PME$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{MP}{PF} = \frac{PE}{PN}$$

tj. $MP \cdot PN = PE \cdot PF$ ... (1)

Sad ako označimo sa B tačku na k t.d. $A-P-B$ zbog potencije tačke imamo $PA \cdot PB = PE \cdot PF$ ... (2)

$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow \quad PA \cdot PB = PM \cdot PN$$

$$PB = \frac{PM \cdot PN}{PA}$$

Pa kako imamo tačke M i N, ako bi mogli konstruisati tačku P odmah bi mogli konstruisati i tačka B.
Posmatrajmo tačke M, O_1 i E. Pokazaćemo da se one redom homotetično preslikavaju u tačke R, O_2 i G, sa centrom homotetije u tački P.
Trouglovi ΔEO_1P i ΔGO_2P su slični (trivijalno)

$$\frac{PE}{PG} = \frac{PO_1}{PO_2} = \frac{O_1E}{O_2G} = \frac{r_1}{r_2} \quad \dots (3)$$

Isto tako $\Delta PME \sim \Delta PRG$ (ZAŠTO?) pa

$$\frac{PM}{PR} = \frac{PE}{PG} = \frac{ME}{GR} \overset{(3)}{=} \frac{r_1}{r_2} \quad \dots (4)$$

(3) i (4) $\Rightarrow$ krug k_1 se homotetično preslikava u krug k_2 sa centrom homotetije u tački P. Pa ako je t tangenta na k_1, prava t će biti tangenta i na krug k_2.
Kako pravu t sad možemo konstruisati to možemo dobiti tačku P a poslije toga i tačku B. Naš problem smo sad sveli na konstrukciju kruga kroz dvije tačke A i B tako da dodiruje dati krug k_1 (ili k_2), a tu konstrukciju znamo od ranije pa je nije teško konstruisati.